数理解析研究所講究録
第 1570 巻 2007 年 14-25

擬非拡大写像の族に関する強収束定理
Strong Convergence Theorems for a Family of Relatively Nonexpansive Mappings

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 高橋 渉 (Wataru TAKAHASHI)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 序論

本稿では, 文献 [3] の解説を行うと共に, それには記さなかった関連事項について述べる。文献 [3] では, 擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping)[7, 13] の族に関する強収束定理が議論の中心である。この擬非拡大写像は, 非拡大写像と似た非線形写像であり, 後で述べる擬射影 (generalized projection) および極大単調作用素のリゾルベント (resolvent) などがその例であることが知られている。非拡大写像と似ていると述べたが, それは形式上のことであり, 実際には, 非拡大写像とは異なる部分が多くある。

本稿では, 第 2 節で準備を行い, 第 3 節で強擬非拡大写像 (strongly relatively nonexpansive mapping) に関するいくつかの性質を取り扱う。それらは, 後の収束定理の議論で必要となる事柄であるが, 文献 [6] で議論された非拡大写像に関する性質の一部が, 擬非拡大でも得られることを意味する。第 4 節では, 擬非拡大写像の族に関する強収束定理を取り扱う。これらの結果は, 中條-高橋 [15] および松下-高橋 [14] の一般化であるが, 写像の列を扱っているところに特徴がある。このような擬非拡大写像の族を対象とした研究には, Reich [17], 高阪-高橋 [12] がある。第 5 節では, 前節で得られた結果を単調写像に関する変分不等式問題へ応用する。ここに記された定理は, すでに飯塚-高橋 [8, 9] で得られたものであるが, 第 4 節の結果と不動点集合に関するある性質を組み合せることによって, 見通しよく証明することができる。

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ は正の整数の集合を, $\mathbb{R}$ は実数の集合を, E は実 Banach 空間を, E^* は E の共役空間を表すものとする。また, $\|\cdot\|$ は E のノルムを, $\langle x, f\rangle$ は $f \in E^*$ の $x \in E$ における値を表す。簡単のため, E^* のノルムも $\|\cdot\|$ で表すことがある。E の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$ で, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す。$x \in E$ に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される E から 2^{E^*} への写像 J を E の双対写像という。

$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする。$x, y \in U$ かつ $x \neq y$ ならば $\|(x+y)/2\| < 1$ であるとき, Banach 空間 E は狭義凸であるという。任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in U$ かつ $\|x - y\| \geq \epsilon$ ならば $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つとき, Banach 空間 E は一様凸であるという。一様凸な Banach 空間は, 回帰的かつ狭義凸であることが知られている。

すべての $x, y \in U$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在するとき, Banach 空間 E は smooth であるという。$x, y \in U$ に対して一様に極限 (2.1) が存在するとき, E は uniformly smooth であるという. E の双対写像 J に関して, 以下のことが知られている (例えば, [19] を参照せよ)。

- E が smooth ならば, J は 1 価写像である。
- E が回帰的ならば, J は全射である。
- E が狭義凸ならば, J は 1 対 1 である。つまり, $x \neq y$ ならば $Jx \cap Jy = \emptyset$ が成り立つ。
- E が uniformly smooth ならば, J は任意の有界集合上で一様連続である。

これらの事実から, E が smooth, 狭義凸かつ回帰的のとき, E^* の双対写像 J^{-1} は 1 価で全単射であることがわかる。

E を smooth な Banach 空間とする。関数 ϕ: $E \times E \to \mathbb{R}$ を, $x, y \in E$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で定義する [1]。E を狭義凸, smooth かつ回帰的な Banach 空間とし, C を空でない E の

閉凸部分集合とする。各 $x \in E$ に対して, 唯一つ $x_0 \in C$ が存在し

$$\phi(x_0, x) = \min\{\phi(y, x) : y \in C\}$$

が成り立つことが知られている。そのような点 x_0 は, $\Pi_C x$ と表され, Π_C は E から C の上への擬射影 (generalized projection) と呼ばれる ([1] および [10] を参照せよ)。E が Hilbert 空間のとき, $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ であり, Π_C は C の上への距離射影と一致することがわかる。さらに, この写像について次の事実が知られている。

補助定理 2.1 ([1] および [10]). E を狭義凸, smooth かつ回帰的な Banach 空間とし, C を空でない E の閉凸部分集合とする。Π_C を E から C の上への擬射影とし, $x \in E$, $x_0 \in C$ とする。このとき, $x_0 = \Pi_C x$ であるための必要十分条件は, すべての $y \in C$ に対して

$$\langle x_0 - y, Jx - Jx_0 \rangle \geq 0$$

が成り立つことである。

補助定理 2.2 ([1] および [10]). E を狭義凸, smooth かつ回帰的な Banach 空間とし, C を空でない E の閉凸部分集合とする。Π_C を E から C の上への擬射影とする。このとき, すべての $x \in E$ と $y \in C$ に対して

$$\phi(y, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(y, x) \tag{2.2}$$

が成り立つ。

E を Banach 空間とする。E から E^* への多価写像 A が単調作用素であるとは, すべての $x, y \in D(A)$, $x^* \in Ax$, $y^* \in Ay$ に対して, $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。ただし, $D(A)$ は A の有効定義域, つまり $D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$ である。単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大であるとは, A のグラフが他のどんな単調作用素のグラフにも含まれないときをいう。E を狭義凸, smooth かつ回帰的な Banach 空間とし, $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする。$r > 0$ と $x \in E$ に対して, Rockafellar [18] により

$$Jx \in Jx_r + rAx_r$$

となる点 $x_r \in D(A)$ が唯一存在することがわかる。このことから, $J_r x = x_r$, つまり, $J_r = (J + rA)^{-1} J$ によって, 1 価写像 $J_r \colon E \to D(A)$ を定義することができる。写像 J_r は, r に対する A のリゾルベント (resolvent) と呼ばれる。極大単調作用素 A の零点の集合 $A^{-1}0 = \{x \in E : Ax \ni 0\}$ は, E の閉凸部分集合であり, $A^{-1}0 = F(J_r)$ であることが知られている [20]。ここで, $F(J_r)$ は J_r の不動点の集合である。

3 強擬非拡大写像

E を smooth な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, そして T を C から E への写像とする。T の不動点の集合を $F(T)$ で表す。C の点 p が T の漸近的不動点 [17] であるとは, $x_n \rightharpoonup p$ かつ $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ を満たす C の点列 $\{x_n\}$ が存在するときをいう。T の漸近的不動点の集合を $\hat{F}(T)$ で表す。

写像 $T\colon C \to E$ が擬非拡大 (relatively nonexpansive) [7, 13, 14] であるとは, $F(T) = \hat{F}(T)$ かつ $\phi(p, Tx) \le \phi(p, x)$ がすべての $x \in C$ と $p \in F(T)$ に対して成り立つときをいう。もし, T が擬非拡大であり, E が狭義凸かつ smooth であるとき, $F(T)$ は E の閉凸部分集合であることが知られている [14, Proposition 2.4]。また, もし, E が smooth, 狭義凸かつ回帰的であるとき, E から C の上への擬射影 Π_C は, 擬非拡大であることが知られている。

写像 $T\colon C \to E$ が次の条件が満たすとき, 強擬非拡大 (strongly relatively nonexpansive) であるといわれる [17]。

- T は擬非拡大である。
- $\{x_n\}$ が C の有界点列, $p \in F(T)$, $\phi(p, x_n) - \phi(p, Tx_n) \to 0$ ならば, $\phi(Tx_n, x_n) \to 0$ が成り立つ。

例 3.1. E を smooth, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合とする。写像 $T\colon C \to E$ は, 擬非拡大で, 不等式

$$\phi(p, Tx) + \phi(Tx, x) \le \phi(p, x)$$

がすべての $p \in F(T)$ と $x \in C$ に対して成り立つとする。このとき, T は強擬非拡大である。よって, (2.2) より, E から C の上への擬射影 Π_C は, 強擬非拡大写像である。また, $J_r = (J + rA)^{-1}J$ を極大単調作用素 $A \subset E \times E^*$ のリゾルベントとする。ただし, $r > 0$ である。このとき, すべての $u \in A^{-1}0$ と $x \in E$ に対して

$$\phi(u, J_r x) + \phi(J_r x, x) \le \phi(u, x)$$

が成り立つことが知られている [11, Lemma 3.1]。さらに E が uniformly smooth のとき, J_r が, $A^{-1}0$ に関して擬非拡大になる (詳しくは [14, Theorem 4.3] を参照せよ)。以上の事実から, この設定の元で J_r は強擬非拡大であることがわかる。

強擬非拡大写像に関して, 次の性質が得られる。

定理 3.2. E を一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合とする。$S\colon C\to E$ を強擬非拡大写像, $T\colon C\to E$ を擬非拡大写像, $U\colon C\to E$ を $U=J^{-1}(\lambda JS+(1-\lambda)JT)$ で定義される写像とする。ただし, λ は $(0,1)$ の定数である。もし, $F(S)\cap F(T)\neq\emptyset$ ならば, $F(U)=\hat{F}(U)=F(S)\cap F(T)$ であり, U は強擬非拡大である。

C 上の恒等写像 I が強擬非拡大であることは自明であるから, 定理 3.2 において, $S=I$ とおくことにより, 次の系が得られる。

系 3.3. E を一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合とする。$T\colon C\to E$ を擬非拡大写像, $U\colon C\to E$ を $U=J^{-1}(\lambda J+(1-\lambda)JT)$ で定義される写像とする。ただし, λ は $(0,1)$ の定数である。もし, $F(T)$ が空でないならば, $F(U)=\hat{F}(U)=F(T)$ であり, U は強擬非拡大である。

さらに, 定理 3.2 と系 3.3 を使うと, 次の結果を得る。

系 3.4. E を一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合とする。$\{S_k\}_{k=1}^N$ を C から E への擬非拡大写像の有限な族とし, $\bigcap_{k=1}^N F(S_k)\neq\emptyset$ を仮定する。ここで, N はある正の整数である。$\{\lambda^k\}_{k=0}^N$ を $(0,1)$ の有限数列で $\sum_{k=0}^N\lambda^k=1$ を満たすものとする。$U\colon C\to E$ を $U=J^{-1}\sum_{k=0}^N\lambda^kJS_k$ で定義される写像とする。ただし, S_0 は C 上の恒等写像である。このとき, $F(U)=\hat{F}(U)=\bigcap_{k=1}^N F(S_k)$ であり, U は強擬非拡大である。

証明. $N=1$ のときは, 系 3.3 より成り立つことがわかる。$N=m$ で成り立つと仮定する。$\{S_k\}_{k=1}^{m+1}$ を C から E への擬非拡大写像の族とし, $\bigcap_{k=1}^{m+1}F(S_k)\neq\emptyset$ を仮定する。$\{\lambda^k\}_{k=0}^{m+1}$ を $(0,1)$ の有限数列で $\sum_{k=0}^{m+1}\lambda^k=1$ を満たすとする。写像 $U\colon C\to E$ を $U=J^{-1}\sum_{k=0}^{m+1}\lambda^kJS_k$ で定義する。このとき

$$U=J^{-1}\left((1-\lambda^{m+1})\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{1-\lambda^{m+1}}JS_k+\lambda^{m+1}JS_{m+1}\right)$$

である。ここで, $\left\{\dfrac{\lambda^k}{1-\lambda^{m+1}}\right\}_{k=0}^{m}$ は, $(0,1)$ の数列で

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{1-\lambda^{m+1}}=\frac{1}{1-\lambda^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}\lambda^k=\frac{1}{1-\lambda^{m+1}}(1-\lambda^{m+1})=1$$

である。$\bigcap_{k=1}^{m} F(S_k) \supset \bigcap_{k=1}^{m+1} F(S_k) \neq \emptyset$ であるから

$$V = J^{-1} \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{1-\lambda^{m+1}} J S_k$$

とおくと，帰納法の仮定により，

$$F(V) = \hat{F}(V) = \bigcap_{k=1}^{m} F(S_k) \tag{3.1}$$

であり，V は強擬非拡大である。また

$$U = J^{-1}((1-\lambda^{m+1})JV + \lambda^{m+1} J S_{m+1})$$

であるから，V と S_{m+1} に関して定理 3.2 を用いると，(3.1) より

$$F(U) = \hat{F}(U) = F(V) \cap F(S_{m+1}) = \bigcap_{k=1}^{m} F(S_k) \cap F(S_{m+1}) = \bigcap_{k=1}^{m+1} F(S_k)$$

であり，さらに U は強擬非拡大であることがわかる。以上より，$N = m+1$ のときも成り立つことが示せた。 □

4 強収束定理

本節では，まず始めに，擬非拡大写像の列に関する強収束定理を述べる。この定理で用いられている手法は，文献 [10, 14–16] などで利用されたものである。特に，[14, Theorem 3.1] の直接的な拡張になっている。

定理 4.1. E を一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間，C を E の空でない閉凸部分集合とする。$\{T_n\}$ を C から E への擬非拡大写像の列とし，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ を仮定する。C の任意の非空閉凸部分集合 B と $\{T_n\}$ の任意の部分列 $\{T_{n_i}\}$ に対して，$\{T_{n_i}\}$ の部分列 $\{T_{n_{i_j}}\}$ と擬非拡大写像 $U\colon C \to E$ が存在し

$$F(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \text{ かつ } \lim_{j\to\infty} \sup_{y\in B} \left\| Uy - T_{n_{i_j}} y \right\| = 0$$

が成り立つと仮定する。E の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を，$x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J T_n x_n); \\ H_n = \{z \in C : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}(x) \end{cases}$$

と定義する。ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ を満たし, $\Pi_{H_n\cap W_n}$ は E から $H_n \cap W_n$ の上への擬射影である。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(U)}(x)$ に強収束する。ここで, $\Pi_{F(U)}$ は E から $F(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ の上への擬射影である。

定理 4.1 と系 3.4 を用いると, 有限個の擬非拡大写像に関する次の定理を得る。

定理 4.2. E を一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする。$\{S_k\}_{k=1}^N$ を C から E への擬非拡大写像の有限個の族とし, $\bigcap_{k=1}^N F(S_k) \neq \emptyset$ を仮定する。ここで, N はある正の整数である。$\{\lambda_n^k : n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, N\}$ を $(0,1)$ の 2 重数列とする。ただし, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=0}^N \lambda_n^k = 1$, かつ, すべての $k = 0, \ldots, N$ に対して $\inf\{\lambda_n^k : n \in \mathbb{N}\} > 0$ を仮定する。E の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = J^{-1}\left(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=0}^N \lambda_n^k J S_k x_n\right); \\ H_n = \{z \in C : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n\rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}(x) \end{cases}$$

と定義する。ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ を満たし, $\Pi_{H_n\cap W_n}$ は E から $H_n \cap W_n$ の上への擬射影であり, S_0 は C 上の恒等写像である。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F(x)$ に強収束する。ここで, Π_F は E から $F = \bigcap_{k=1}^N F(S_k)$ の上への擬射影である。

5 変分不等式問題への応用

文献 [3] では, 定理 4.1 を応用し, 極大単調作用素の零点の近似を議論した。ここでは, Hilbert 空間において, 単調作用素に関する変分不等式問題への応用を述べよう。

H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合とする。このとき, 写像 $A\colon C \to H$ に関する変分不等式問題とは, $\langle y - x, Ax\rangle \geq 0\ (\forall y \in C)$ を満たす $x \in C$ を求める問題である。このとき, x をこの問題の解といい, 解の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ で表す。

C を空でない H の閉凸部分集合とする。写像 $A\colon C \to H$ が逆強単調 [5,21] であるとは, ある正の実数 α が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう。このとき, A は α-逆強単調写像と呼ばれる。定義より明かに, 逆強単調写像は, 単調で Lipschitz 連続であることがわかる。さらに, λ を $0 < \lambda \leq 2\alpha$ を満

たす実数, I を C 上の恒等写像とするとき, 写像 $I-\lambda A$ は非拡大である。つまり, すべての $x,y\in C$ に対して

$$\|(I-\lambda A)x-(I-\lambda A)y\|\leq\|x-y\|$$

が成り立つ ([22] または [21] を参照せよ)。P_C を H から C の上への距離射影とする。距離射影 P_C は, 1-逆強単調であることが知られている。つまり, すべての $x,y\in H$ に対して

$$\langle x-y,P_Cx-P_Cy\rangle\geq\|P_Cx-P_Cy\|^2$$

が成り立つ。この不等式は

$$\|P_Cx-P_Cy\|^2\leq\|x-y\|^2-\|(I-P_C)x-(I-P_C)y\|^2$$

と同値であり, これより直ちに, P_C が非拡大であることがわかる。さらに, 写像 $A\colon C\to H$ と $\lambda>0$ に対して

$$F(P_C(I-\lambda A))=\mathrm{VI}(C,A) \tag{5.1}$$

が成り立つことが知られている。詳しくは, [21] を参照するとよい。

ここでは, 文献 [22], [8] で議論された次の問題を考える。C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $S\colon C\to C$ を非拡大, $A\colon C\to H$ を逆強単調写像とするとき, S に関する不動点問題と A に関する変分不等式問題の共通解 $z\in F(S)\cap\mathrm{VI}(C,A)$ を求めよ。定理 4.1 をこの問題に応用するために, 次の補助定理が必要である。

補助定理 5.1 ([2]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする。α と λ は実定数で, $0<\lambda<2\alpha$ を満たすとする。$S\colon C\to C$ を非拡大写像, $A\colon C\to H$ を α-逆強単調写像とする。もし, $F(P_C(I-\lambda A))\cap F(S)\neq\emptyset$ ならば

$$\begin{aligned}F(P_C(I-\lambda A))\cap F(S)&=F(P_C(I-\lambda A)S)\\&=F(SP_C(I-\lambda A))\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, I は C 上の恒等写像である。

証明. 等式 $F(SP_C(I-\lambda A))=F(P_C(I-\lambda A))\cap F(S)$ の証明は, 文献 [2] に記述した。そこで, $F(P_C(I-\lambda A))\cap F(S)=F(P_C(I-\lambda A)S)$ の証明のみを記す。

包含関係 $F(P_C(I-\lambda A)S)\supset F(P_C(I-\lambda A))\cap F(S)$ が成り立つことは容易にわかるので, $F(P_C(I-\lambda A)S)\subset F(P_C(I-\lambda A))\cap F(S)$ が成り立つことを示そう。$z\in$

$F(P_C(I-\lambda A)S)$, $w \in F(P_C(I-\lambda A)) \cap F(S)$ とする。P_C は非拡大, A は逆強単調, S は非拡大であるから

$$
\begin{aligned}
\|z-w\|^2 &= \|P_C(I-\lambda A)Sz - P_C(I-\lambda A)Sw\|^2 \\
&\le \|(I-\lambda A)Sz - (I-\lambda A)Sw\|^2 \\
&= \|Sz - Sw - \lambda(ASz - ASw)\|^2 \\
&= \|Sz-Sw\|^2 - 2\lambda \langle Sz-Sw, ASz-ASw \rangle + \lambda^2 \|ASz-ASw\|^2 \\
&\le \|Sz-Sw\|^2 - \lambda(2\alpha-\lambda)\|ASz-ASw\|^2 \\
&\le \|Sz-Sw\|^2 \le \|z-w\|^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって, $\lambda(2\alpha-\lambda)\|ASz-ASw\|^2 = 0$. つまり, $ASz = ASw$ が成り立つ。P_C が 1-逆強単調, $I-\lambda A$ が非拡大, $w = Sw$ であるから

$$
\begin{aligned}
\|z-w\|^2 &= \|P_C(I-\lambda A)Sz - P_C(I-\lambda A)Sw\|^2 \\
&\le \langle (I-\lambda A)Sz - (I-\lambda A)Sw, P_C(I-\lambda A)Sz - P_C(I-\lambda A)Sw \rangle \\
&= \langle (I-\lambda A)Sz - (I-\lambda A)Sw, z-w \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|(I-\lambda A)Sz - (I-\lambda A)Sw\|^2 + \|z-w\|^2 \\
&\qquad - \|(I-\lambda A)Sz - (I-\lambda A)Sw - (z-w)\|^2) \\
&\le \frac{1}{2}(2\|z-w\|^2 - \|Sz-z\|^2)
\end{aligned}
$$

を得る。ゆえに, $\|Sz-z\|^2 = 0$, つまり, $z \in F(S)$ である。これにより, $z = P_C(I-\lambda A)Sz = P_C(I-\lambda A)z$. これは $z \in F(P_C(I-\lambda A))$ を意味する。結果として $z \in F(P_C(I-\lambda A)) \cap F(S)$ であることが示せた。 □

補助定理 5.1 の仮定のもとで, 写像 $I-S$ は demiclosed である。つまり, $u_n \rightharpoonup u$ かつ $\|u_n - Su_n\| \to 0$ を満たす C の点列に対して, $(I-S)u = 0$ が成り立つ ([4] または [19] を参照せよ)。したがって, $F(S) = \hat{F}(S)$ であるから, S は擬非拡大であることがわかる。

定理 4.1 と補助定理 5.1 を使うと, 次の飯塚-高橋 [8] の結果を得ることができる。この結果から, 非拡大写像の不動点集合と逆強単調写像に対する変分不等式問題の解の集合の共通点に強収束する点列を得ることができる。

定理 5.2 ([8, Theorem 3.1]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする。α を正の定数, $S\colon C \to C$ を非拡大, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像とし, $F(S) \cap \mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ を仮定する。$\{\lambda_n\}$ を閉区間 $[a, b]$ の点列とする。ただし, $0 < a \le b < 2\alpha$ である。点列

$\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ を, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = P_C(Sx_n - \lambda_n ASx_n); \\ H_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}; \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x - x_n \rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。ここで, P_C は H から C の上への, $P_{H_n \cap W_n}$ は H から $H_n \cap W_n$ の上への距離射影である。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap \mathrm{VI}(C,A)}(x)$ へ強収束する。ここで, $P_{F(S)\cap \mathrm{VI}(C,A)}$ は H から $F(S) \cap \mathrm{VI}(C, A)$ の上への距離射影である。

証明. Hilbert 空間 H は, 一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間であり, $x, y \in H$ に対して, $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ である。このことから, 擬射影は距離射影と一致することがわかる。各 n に対して, $T_n = P_C(I - \lambda_n A)S$ とおく。補助定理 5.1 と (5.1) から, $F(T_n) = F(P_C(I - \lambda_n A)S) = \mathrm{VI}(C, A) \cap F(S)$, つまり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = \mathrm{VI}(C, A) \cap F(S) \neq \emptyset$ を得る。これと T_n が非拡大であることから, T_n は擬非拡大であることがわかる。ここで, B を空でない C の閉凸部分集合とし, $\{T_{n_i}\}$ を $\{T_n\}$ の部分列とする。$\{\lambda_{n_i}\}$ を $\{T_{n_i}\}$ に対応する $\{\lambda_n\}$ の部分列とする。仮定より, $\lambda \in [a, b]$ と $\{\lambda_{n_i}\}$ の部分列 $\{\lambda_{n_{i_j}}\}$ が存在し, $\lim_{j\to\infty} \lambda_{n_{i_j}} = \lambda$ が成り立つ。ここで, 写像 $U \colon C \to H$ を $U = P_C(I - \lambda A)S$ で定義する。補助定理 5.1 と (5.1) より, $F(U) = \mathrm{VI}(C, A) \cap F(S) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ を得る。これと U が非拡大であることから, U は擬非拡大であることがわかる。距離射影 P_C は非拡大であるから, すべての $y \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \|Uy - T_n y\| &= \|P_C(I - \lambda A)Sy - P_C(I - \lambda_n A)Sy\| \\ &\leq \|(I - \lambda A)Sy - (I - \lambda_n A)Sy\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_n| \, \|ASy\| \end{aligned}$$

が成り立つ。A は Lipschitz 連続で S は非拡大であるから, $\sup_{y\in B} \|ASy\| < \infty$ である。ゆえに

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{y\in B} \left\|Uy - T_{n_{i_j}} y\right\| \leq \lim_{j\to\infty} \left|\lambda - \lambda_{n_{i_j}}\right| \sup_{y\in B} \|ASy\| = 0$$

である。定理 4.1 より, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap \mathrm{VI}(C,A)}(x)$ へ強収束することが示せた。 □

同様にして, 定理 4.1 と補助定理 5.1 を使い, 飯塚-高橋 [9] の結果を得ることもできる。

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Scientiae Mathematicae Japonicae **66** (2007), 89–99.

[3] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), to appear.

[4] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Nonlinear functional analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVIII, Part 2, Chicago, Ill., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976, pp. 1–308.

[5] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228.

[6] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[7] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[8] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by a hybrid method for nonexpansive mappings and inverse strongly-monotone mappings*, International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, pp. 81–94.

[9] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for nonlinear mappings of nonexpansive and monotone type and applications*, Adv. Nonlinear Var. Inequal. **9** (2006), 1–10.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2007), Art. ID 21972, 18.

[13] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[14] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[15] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[16] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.

[17] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[18] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[19] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[20] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[21] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2005 (Japanese).

[22] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.